Dodatek A

Przykładowe rozwiązania zadań

A.1. Dodawanie i odejmowanie w kodzie ZM

Przykład 1.

Dodać w kodzie ZM następującą parę liczb:

$$X = 5\frac{5}{8} \qquad Y = -11\frac{3}{4}$$

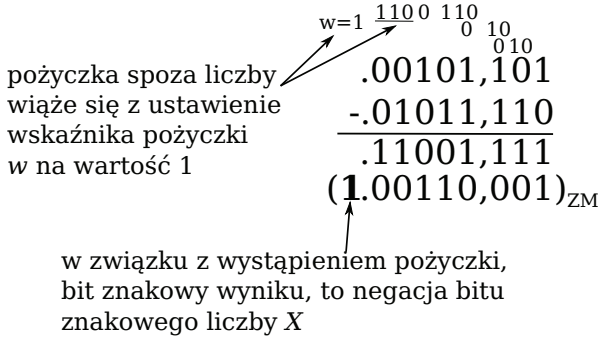
Liczby muszą być zapisane w kodzie ZM:

$$X = (0.101,101)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (1.1011,11)_{\mathrm{ZM}}$$

Następnie należy zapisać liczby na $k+1$ pozycjach. W tym przypadku część całkowita liczby X zapisana jest na trzech bitach, a część całkowita liczby Y zapisana jest na czterech bitach. Dopisujemy 0 z lewej strony liczby, która zapisana jest na większej liczbie bitów, a do drugiej liczby (również z lewej strony) dopisujemy tyle zer, aby była zapisana na takiej samej liczbie bitów co poprzednia liczba. Jest to konieczne ze względu na ewentualne przepełnienie, które może pojawić się przy dodawaniu, dlatego do liczby Y dopisujemy jedno 0, a do liczby X dopisujemy dwa zera:

$$Y = (1.01011,11)_{\mathrm{ZM}} \qquad X = (0.00101,101)_{\mathrm{ZM}}$$

Kolejnym krokiem rozwiązania zadania jest wykonanie właściwej operacji (dodawania lub odejmowania). W tym przypadku mamy wykonać operację $X+Y$, przy czym bity znakowe liczb są różne. Zgodnie z instrukcją zapisaną w tabeli 1.2 należy więc wykonać działanie $|X|-|Y|$ na modułach liczb (bez bitów znakowych).



Podczas wykonywania operacji odejmowania wystąpiła pożyczka (wskaźnik pożyczki $w = 1$) w związku z czym nastąpiła negacja bitów modułu wyniku (bitów znajdujących się między kropką a ostatnią jedynką). Bit znakowy wyniku, to negacja spowodowana pożyczką bitu znakowego liczby X.

Ostatnim etapem zadania jest zdekodowanie wyniku z systemu dwójkowego do systemu dziesiętnego:

$$X + Y = (1.00110,001)_{\mathrm{ZM}} = \left(-6\frac{1}{8}\right)_{10}$$

Przykład 2.

Dodać w kodzie ZM następującą parę liczb:

$$X = -14\frac{1}{4} \qquad Y = -6\frac{1}{8}$$

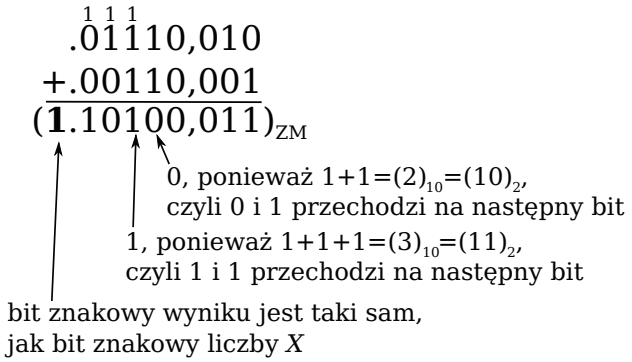
Liczby zapisane w kodzie ZM:

$$X = (1.1110,01)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (1.110,001)_{\mathrm{ZM}}$$

Liczby z uwzględnieniem $k+1$ pozycji:

$$X = (1.01110,01)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (1.00110,001)_{\mathrm{ZM}}$$

Należy wykonać operację $X+Y$, a więc zgodnie z instrukcją zapisaną w tabeli 1.2 należy wykonać działanie $|X| + |Y|$, ponieważ bity znakowe obu liczb są takie same.



Bit znakowy wyniku ma taką samą wartość, jak bit znakowy liczby X.
Przedstawienie wyniku:

$$X + Y = (1.10100,011)_{\mathrm{ZM}} = \left(-20\frac{3}{8}\right)_{10}$$

Przykład 3.

Odjąć w kodzie ZM następującą parę liczb:

$$X = 9\frac{3}{4} \qquad Y = 4\frac{3}{8}$$

Liczby zapisane w kodzie ZM:

$$X = (0.1001,11)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (0.100,011)_{\mathrm{ZM}}$$

Liczby z uwzględnieniem $k+1$ pozycji:

$$X = (0.01001,11)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (0.00100,011)_{\mathrm{ZM}}$$

Należy wykonać operację $X-Y$, a więc zgodnie z instrukcją zapisaną w tabeli 1.2 należy wykonać działanie $|X| - |Y|$, ponieważ bity znakowe obu liczb są takie same.

```
w=0          010
             010
  .01001,110
 -.00100,011
(0.00101,011)ZM
 ↑
wskaźnik pożyczki w jest równy 0, w związku
z czym (nie wystąpiła pożyczka spoza liczby)
bit znakowy wyniku jest taki sam, jak bit
znakowy liczby X
```

Wskaźnik pożyczki $w = 0$, a więc wynik zapisany jest w kodzie ZM, a bit znakowy wyniku ma taką samą wartość, jak bit znakowy liczby X.
Przedstawienie wyniku:

$$X - Y = (0.00101, 011)_{\text{ZM}} = \left(5\frac{3}{8}\right)_{10}$$

Przykład 4.

Odjąć w kodzie ZM następującą parę liczb:

$$X = 13\frac{9}{16} \qquad Y = -10\frac{7}{8}$$

Liczby zapisane w kodzie ZM:

$$X = (0.1101, 1001)_{\text{ZM}} \qquad Y = (1.1010, 111)_{\text{ZM}}$$

Liczby z uwzględnieniem $k + 1$ pozycji:

$$X = (0.01101, 1001)_{\text{ZM}} \qquad Y = (1.01010, 111)_{\text{ZM}}$$

Należy wykonać operację $X - Y$, a więc zgodnie z instrukcją zapisaną w tabeli 1.2 należy wykonać działanie $|X| + |Y|$, ponieważ bity znakowe liczby X i Y są różne.

```
   1 1 1 1 1
  .01101,1001
 +.01010,1110
(0.11000,0111)ZM
```

Bit znakowy wyniku, ma taką samą wartość, jak bit znakowy liczby X.
Przedstawienie wyniku:

$$X - Y = (0.11000, 0111)_{\text{ZM}} = \left(24\frac{7}{16}\right)_{10}$$

A.2. Dodawanie i odejmowanie w kodzie ZU1

Przykład 5.

Dodać w kodzie ZU1 następującą parę liczb:

$$X = -2\frac{1}{2} \qquad Y = 5\frac{3}{8}$$

Liczby muszą być zapisane na $k+1$ pozycjach, rozszerzenie o dodatkowe, nieznaczące cyfry najlepiej wykonać w kodzie ZM:

$$X = (1.10,1)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (0.101,011)_{\mathrm{ZM}}$$

po zapisaniu na $k+1$ pozycjach oraz z wyrównaniem części ułamkowej:

$$X = (1.0010,100)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (0.0101,011)_{\mathrm{ZM}}$$

Następnie liczby należy zapisać w kodzie ZU1:

$$X = (1.1101,011)_{\mathrm{ZU1}} \qquad Y = (0.0101,011)_{\mathrm{ZU1}}$$

Kolejnym krokiem rozwiązania zadania jest wykonanie właściwej operacji. W kodzie ZU1, w przypadku operacji $X+Y$ zawsze wykonujemy działanie $X+Y$ (wraz z bitami znakowymi).

$$\begin{array}{rl}
 & \overset{1}{}\,\overset{1}{}\,\overset{1}{}\,\overset{1}{}\,\overset{1}{}\,\overset{1}{}\,\overset{1}{} \\
 & 1.1101,011 \\
 & +0.0101,011 \\
\hline
 & 0.0010,110 \\
 & +\qquad\qquad 1 \\
\hline
 & (0.0010,111)_{\mathrm{ZU1}} \\
 & (0.0010,111)_{\mathrm{ZM}}
\end{array}$$

przepełnienie

Podczas wykonywania operacji dodawania wystąpiło przepełnienie, w związku z czym należy dodać 1 do najmniej znaczącej pozycji wyniku. Ostateczny wynik zapisany jest zawsze w kodzie ZU1, w związku z czym należy dokonać zamiany do kodu ZM.
Ostatnim etapem zadania jest zdekodowanie wyniku z systemu dwójkowego do systemu dziesiętnego:

$$X+Y = (0.0010,111)_{\mathrm{ZM}} = \left(2\frac{7}{8}\right)_{10}$$

Przykład 6.

Odjąć w kodzie ZU1 następującą parę liczb:

$$X = 5\frac{1}{4} \qquad Y = -8\frac{3}{8}$$

Liczby zapisane w kodzie ZM:

$$X = (0.101,01)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (1.1000,011)_{\mathrm{ZM}}$$

Liczby po zapisaniu na $k+1$ pozycjach:

$$X = (0.00101,010)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (1.01000,011)_{\mathrm{ZM}}$$

Liczby zapisane w kodzie ZU1:

$$X = (0.00101,010)_{\mathrm{ZU1}} \qquad Y = (1.10111,100)_{\mathrm{ZU1}}$$

W kodzie ZU1, w przypadku operacji $X-Y$ zawsze wykonujemy działanie $X-Y$ wraz z bitami znakowymi.

```
1   1 110
      0 110
        0 10
  0.00101,010
 -1.10111,100
 ------------
  0.01101,110
 -          1
 ------------
 (0.01101,101)ZU1
 (0.01101,101)ZM
```

pożyczka

Podczas wykonywania operacji odejmowania wystąpiła pożyczka, w związku z czym należy odjąć 1 od najmniej znaczącego bitu wyniku. Ostateczny wynik zapisany jest zawsze w kodzie ZU1, w związku z czym należy dokonać zamiany do kodu ZM.
Przedstawienie wyniku:

$$X - Y = (0.01101,101)_{\text{ZM}} = \left(13\frac{5}{8}\right)_{10}$$

A.3. Dodawanie i odejmowanie w kodzie ZU2

Przykład 7.

Dodać w kodzie ZU2 następującą parę liczb:

$$X = -4\frac{5}{8} \qquad Y = 6\frac{3}{8}$$

Liczby muszą być zapisane z uwzględnieniem $k+1$ pozycji, co najlepiej wykonać w kodzie ZM:

$$X = (1.100,101)_{\text{ZM}} \qquad Y = (0.110,011)_{\text{ZM}}$$

po zapisaniu na $k+1$ pozycjach oraz z wyrównaniu części ułamkowej:

$$X = (1.0100,101)_{\text{ZM}} \qquad Y = (0.0110,011)_{\text{ZM}}$$

Następnie liczby należy zapisać w kodzie ZU2:

$$X = (1.1011,011)_{\text{ZU2}} \qquad Y = (0.0110,011)_{\text{ZU2}}$$

Kolejnym krokiem rozwiązania zadania jest wykonanie właściwej operacji. W kodzie ZU2, w przypadku operacji $X + Y$ zawsze wykonujemy działanie $X + Y$ (wraz z bitami znakowymi).

```
1 1  1 1     1 1
  1.1011,011
 +0.0110,011
 ------------
 (0.0001,110)ZU1
 (0.0001,110)ZM
```

przepełnienie
jest ignorowane

Podczas wykonywania operacji dodawania wystąpiło przepełnienie, które jest *ignorowane*. Wynik zapisany jest zawsze w kodzie ZU2, w związku z czym należy dokonać zamiany do kodu ZM.
Ostatnim etapem zadania jest zdekodowanie wyniku z systemu dwójkowego do systemu dziesiętnego:

$$X + Y = (0.0001,110)_{\text{ZM}} = \left(1\frac{3}{4}\right)_{10}$$

Przykład 8.

Odjąć w kodzie ZU2 następującą parę liczb:

$$X = 5\frac{1}{4} \qquad Y = -8\frac{3}{8}$$

Liczby zapisane w kodzie ZM:

$$X = (0.101, 01)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (1.1000, 011)_{\mathrm{ZM}}$$

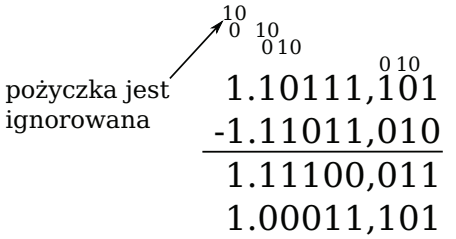
Liczby po zapisaniu na $k+1$ pozycjach:

$$X = (0.00101, 010)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (1.01000, 011)_{\mathrm{ZM}}$$

Liczby zapisane w kodzie ZU2:

$$X = (0.00101, 010)_{\mathrm{ZU2}} \qquad Y = (1.10111, 100)_{\mathrm{ZU2}}$$

W kodzie ZU2, w przypadku operacji $X - Y$ zawsze wykonujemy działanie $X - Y$ (wraz z bitami znakowymi).



Podczas wykonywania operacji odejmowania wystąpiła pożyczka, która jest *ignorowana*. Wynik zapisany jest zawsze w kodzie ZU2, w związku z czym należy dokonać zamiany do kodu ZM.
Przedstawienie wyniku:

$$X - Y = (0.01101, 101)_{\mathrm{ZM}} = \left(13\frac{5}{8}\right)_{10}$$

A.4. Mnożenie I wariantem metody Booth'a

Przykład 9.

Pomnożyć, stosując I wariant metody Booth'a parę liczb:

$$X = \frac{5}{8} \qquad Y = -\frac{5}{8}$$

Liczby zapisane w kodzie ZM:

$$X = (0.0, 101)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (1.0, 101)_{\mathrm{ZM}}$$

Liczby w postaci $\boxed{\text{bit znakowy}}$. $\boxed{\text{część ułamkowa}}$:

$$X = (0.101)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (1.101)_{\mathrm{ZM}}$$

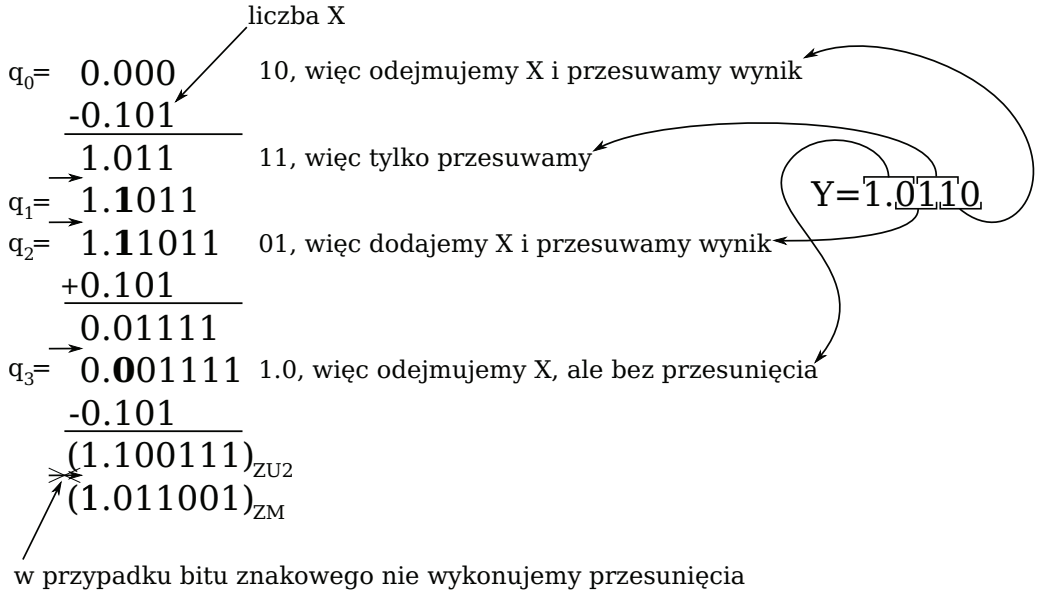
Liczby zapisane w kodzie ZU2:

$$X = (0.101)_{\text{ZU2}} \qquad Y = (1.011)_{\text{ZU2}}$$

Liczbę Y należy zapisać z uwzględnieniem dodatkowego bitu („dopisujemy 0"):

$$Y = (1.0110)_{\text{ZU2}}$$

Następnie należy sprawdzać kolejne pary bitów liczby Y zaczynając od prawej strony i wykonywać odpowiednie działania zgodnie z opisem zamieszczonym w rozdziale 1.6.2.



Przedstawienie wyniku:

$$X \cdot Y = (1.011001)_{\text{ZM}} = \left(\frac{25}{64}\right)_{10}$$

A.5. Mnożenie II wariantem metody Booth'a

Przykład 10.

Pomnożyć, stosując II wariant metody Booth'a parę liczb:

$$X = \frac{7}{8} \qquad Y = -\frac{3}{8}$$

Liczby zapisane w kodzie ZM:

$$X = (0.0,111)_{\text{ZM}} \qquad Y = (1.0,011)_{\text{ZM}}$$

Liczby w postaci $\boxed{\text{bit znakowy}}$. $\boxed{\text{część ułamkowa}}$:

$$X = (0.111)_{\text{ZM}} \qquad Y = (1.011)_{\text{ZM}}$$

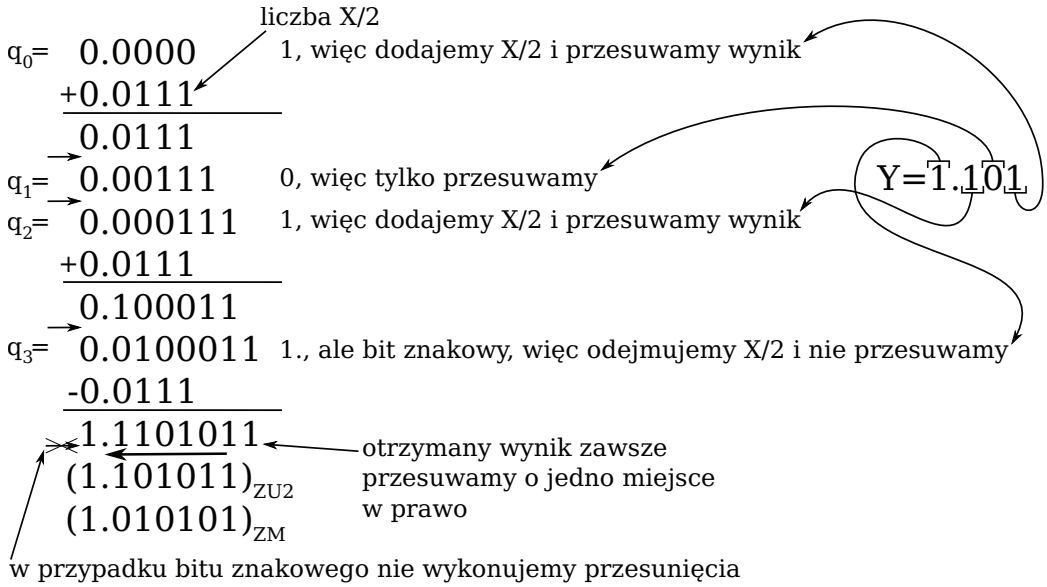
Liczby zapisane w kodzie ZU2:

$$X = (0.111)_{\text{ZU2}} \qquad Y = (1.101)_{\text{ZU2}}$$

Liczbę X należy podzielić przez 2:

$$\frac{X}{2} = X^{-1} = (0.0111)_{\mathrm{ZU2}}$$

Następnie należy sprawdzać pojedyncze bity liczby Y zaczynając od prawej strony i wykonywać odpowiednie działania zgodnie z opisem zamieszczonym w rozdziale 1.6.2. Otrzymany wynik należy pomnożyć przez liczbę 2^1 (przesunąć o jedno miejsce w prawo), co wynika z zastosowanego na początku przesunięcia $X \cdot 2^{-1}$.



Przedstawienie wyniku:

$$X \cdot Y = (1.010101)_{\mathrm{ZM}} = \left(\frac{21}{64}\right)_{10}$$

A.6. Dzielenie metodą porównawczą

Przykład 11.

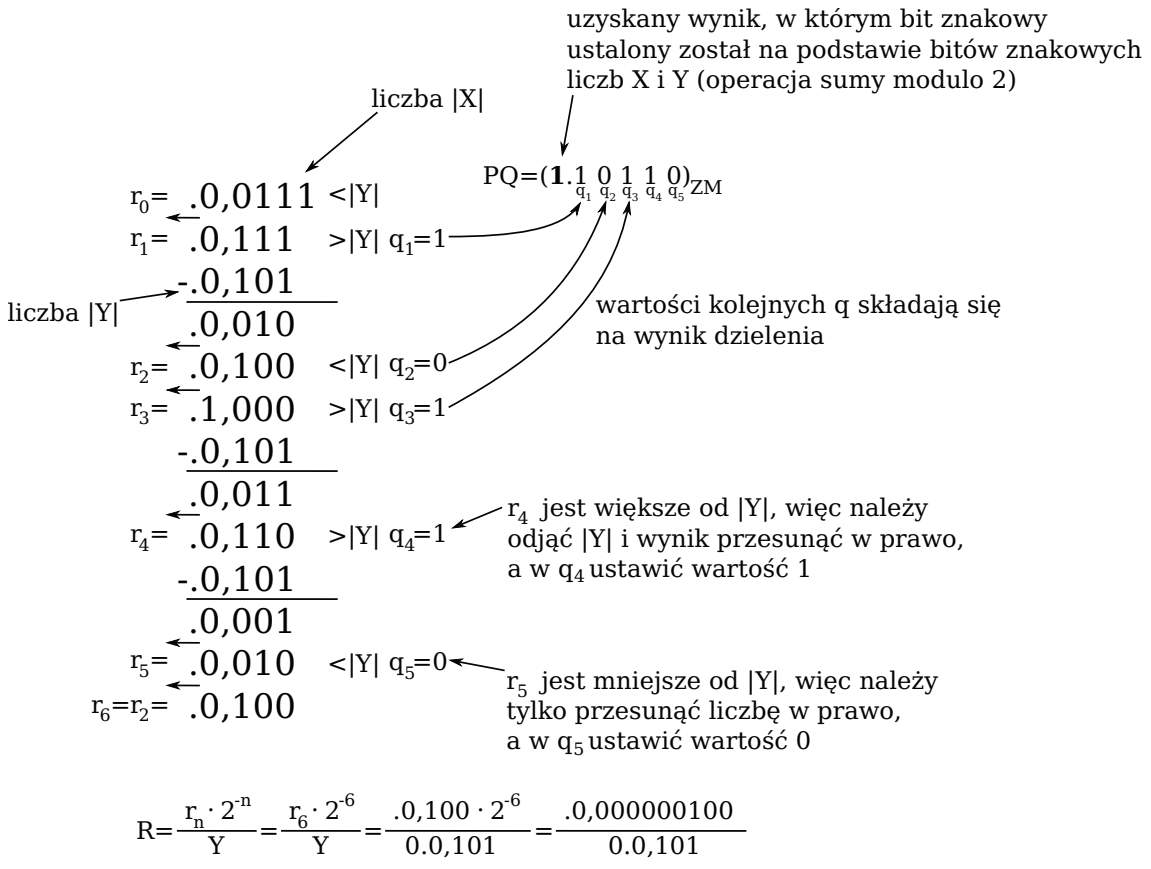
Podzielić stosując metodę porównawczą następującą parę liczb:

$$X = -\frac{7}{16} \qquad Y = \frac{5}{8}$$

Liczby zapisane w kodzie ZM:

$$X = (1.0,0111)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y = (0.0,101)_{\mathrm{ZM}}$$

Liczby w powinny być zapisane na $k+1$ pozycjach, co w tym przypadku jest spełnione (w obu liczbach części całkowite wynoszą 0, co jest jednocześnie $k+1$ pozycją).
Przed rozpoczęciem dzielenia należy sprawdzić, czy spełniony jest warunek $|X| < |Y|$. W tym przypadku warunek jest spełniony, więc można rozpocząć dzielenie zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 1.7.1.
Dzielenie liczb z zastosowaniem metody porównawczej wykonywane jest dla liczb zapisanych w kodzie ZM bez bitu znakowego, a więc $|X| \cdot |Y|$. Bit znakowy wyniku ustalany jest po zakończeniu wszystkich działań.



$$R=\frac{r_n\cdot 2^{-n}}{Y}=\frac{r_6\cdot 2^{-6}}{Y}=\frac{.0{,}100\cdot 2^{-6}}{0.0{,}101}=\frac{.0{,}000000100}{0.0{,}101}$$

A.7. Dzielenie metodą nierestytucyjną

Przykład 12.

Podzielić, stosując metodę nierestytucyjną parę liczb:

$$X=-\frac{7}{16} \qquad Y=\frac{5}{8}$$

Liczby zapisane w kodzie ZM:

$$X=(1.0,0111)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y=(0.0,101)_{\mathrm{ZM}}$$

Liczby w postaci $\boxed{\text{bit znakowy}}$. $\boxed{\text{część ułamkowa}}$:

$$X=(1.0111)_{\mathrm{ZM}} \qquad Y=(0.101)_{\mathrm{ZM}}$$

Liczby zapisane w kodzie ZU2:

$$X=(1.1001)_{\mathrm{ZU2}} \qquad Y=(0.101)_{\mathrm{ZU2}}$$

Przed rozpoczęciem dzielenia należy sprawdzić, czy spełniony jest warunek $|X|<|Y|$. W tym przypadku warunek jest spełniony, więc można rozpocząć dzielenie zgodnie z zasadami podanymi w rozdziale 1.7.2.
Dzielenie liczb z zastosowaniem metody nierestytucyjnej wykonywane jest dla liczb zapisanych w kodzie ZU2, a więc $|X|\cdot|Y|$. Każdorazowo należy jednak pamiętać o dodaniu poprawki $p=-1+2^{-n}$.

liczba |X|

$PQ=(0.0\ 1\ 0\ 0\ 1)_{ZU_2}$ ($q_0\ q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5$)

$r_0 = 1.1001 \neq q_0=0$

1.001

liczba |Y| $+0.101$

$r_1 = 1.110 \neq q_1=0$

1.100

$+0.101$

$r_2 = 0.001 = q_2=1$

0.010

-0.101

$r_3 = 1.101 \neq q_3=0$

1.010

$+0.101$

$r_4 = 1.111 \neq q_4=0$

1.110

$+0.101$

$r_5 = 0.011 = q_5=1$

0.110

-0.101

$r_6=r_2 = 0.001$

wartości kolejnych q składają się na wynik pseudoilorazu

bit znakowy r_4 jest różny od bitu znakowego Y, więc należy resztę częściową przesunąć w prawo i odjąć Y, a w q_4 ustawić wartość 0

bit znakowy r_5 jest równy bitowi znakowemu Y, więc należy resztę częściową przesunąć w prawo i dodać Y, a w q_5 ustawić wartość 1

$PQ = 0.0\ 1\ 0\ 0\ 1$

$+P = 1.0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$

$(1.0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1)_{ZU_2}$

$(1.1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1)_{ZM}$

Do uzyskanego wyniku dodajemy poprawkę p

$$R=\frac{r_n \cdot 2^{-n}}{Y}=\frac{r_6 \cdot 2^{-6}}{Y}=\frac{0.001 \cdot 2^{-6}}{0.101}=\frac{0.0000001}{0.101}$$